INT-MANAGEMENT 2004

L'énoncé comporte deux problèmes indépendants. Ils doivent être rédigés sur des copies séparées.

Problème.

Première partie.

1) On considère la suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}} - \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}}\ .$$

   a) Étudier le sens de variation de la suite u .

   b) Montrer que la suite u est convergente vers un réel L que l'on ne cherchera pas à calculer.

   c) En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}$ lorsque n tend vers plus l'infini.

2) Soit la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sin v_n\ .$$

   a) Étudier le sens de variation de la suite v.

   b) Montrer que la suite v est convergente vers un réel que l'on précisera.

   c) Déterminer un réel α tel que la suite de terme général $v_{n+1}^{\alpha} - v_n^{\alpha}$ converge vers un réel non nul.

   d) On admettra le théorème de Césaro, à savoir :

   Pour toute suite réelle w convergente vers un réel l on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k\right) = l.$

   A l'aide du théorème de Césaro, montrer que :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}\ .$$

3) On définit la suite s par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ s_n = \sum_{p=1}^{n} v_p\ .$$

   a) Déterminer la limite de s_n lorsque n tend vers plus l'infini.

b) α) En remarquant que v_n équivaut à $\sqrt{\frac{3}{n}}$ quand n tend vers plus l'infini, montrer que, pour tout réel ε strictement positif, il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier naturel n strictement supérieur à N on ait :

$$\left| \frac{\sum_{p=N+1}^{n} \left(\sqrt{\frac{3}{p}} - v_p \right)}{s_n} \right| < \varepsilon.$$

β) En déduire que s_n équivaut à $\sum_{p=1}^{n} \sqrt{\frac{3}{p}}$ quand n tend vers plus l'infini.

γ) Déterminer un équivalent simple de s_n lorsque n tend vers plus l'infini.

Deuxième partie.

On considère deux séries entières réelles $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ de même rayon de convergence égal à 1 et vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0 \text{ et } b_n > 0. \\ a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} b_n. \\ \text{la série } \sum a_n \text{ diverge.} \end{cases}$$

On note : $\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

1) a) Montrer que f est croissante sur $]0,1[$.

b) Montrer que $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = +\infty$.

2) a) En remarquant que a_n équivaut à b_n lorsque l'entier naturel n tend vers plus l'infini, montrer que, pour tout réel ε strictement positif, il existe un entier naturel N tel que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0,1[$ on ait :

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (b_n - a_n) x^n \right| \leqslant \varepsilon f(x)$$

b) En utilisant la question II) 1) b), déterminer la limite de $\dfrac{\sum_{n=1}^{N} (b_n - a_n) x^n}{f(x)}$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

c) En déduire que $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Troisième partie.

On considère la série entière réelle $\sum v_n x^n$ où v est la suite définie dans la partie I) question 2), on notera V l'application définie sur $]-1,1[$ par :

$$\forall x \in]-1,1[\ , V(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n.$$

1) a) Montrer que V est bien définie.

b) On note W l'application définie sur $]-1,1[$ par :

$$\forall x \in]-1,1[\ , W(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

Montrer que W est bien définie et que :

$$V(x) \underset{x\to 1}{\sim} W(x)\sqrt{3}.$$

2) On pose pour tout x de $]0,1[$, $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$.

a) Montrer que l 'application $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ est intégrable sur l'intervalle $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

b) Montrer que :

$$\forall x \in]-1,1[\ , \ [W(x)]^2 = \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right)\right] x^n.$$

c) On notera :

$$\forall n \geqslant 2\ , \ H_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right).$$

α) Montrer que :

$$\forall m \geqslant 1, \ H_{2m} = \frac{1}{2m}\left[2\sum_{k=1}^{m-1} h\left(\frac{k}{2m}\right) + h\left(\frac{1}{2}\right)\right].$$

β) Montrer que :

$$\forall m \geqslant 1\ , \quad H_{2m+1} = \frac{2}{2m+1}\left[\sum_{k=1}^{m} h\left(\frac{k}{2m+1}\right)\right].$$

γ) En encadrant avec soin H_{2m} et H_{2m+1} , déterminer les limites de H_{2m} et H_{2m+1} lorsque m tend vers plus l'infini.

3) Déduire des questions précédentes un équivalent simple de $W(x)$ puis de $V(x)$ lorsque x tend vers 1.

Quatrième partie.

Soit k l'application définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{e}\right[, k(t) = 0.$$
$$\forall t \in \left[\frac{1}{e}, 1\right] , k(t) = \frac{1}{t}.$$

On admettra la propriété $(\mathcal{K})$:
$\forall \varepsilon > 0$, il existe un couple $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que :

$$\forall x \in [0,1] \ , \ P(x) \leqslant k(x) \leqslant Q(x) \quad , \quad \int_0^1 (k(x) - P(x))\,dx \leqslant \varepsilon \quad , \quad \int_0^1 (Q(x) - k(x))\,dx \leqslant \varepsilon.$$

On considère une série entière réelle $\sum c_n x^n$ de rayon de convergence égal à 1 telle que :

$$\forall n \geqslant 0,\ c_n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{1-x}.$$

On notera $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ pour $x \in]0,1[$.

1) a) Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to 1} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{n+np} = \frac{1}{p+1}.$$

b) En déduire que :

$$\forall R \in \mathbb{R}[X] , \lim_{x\to 1} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n R(x^n) = \int_0^1 R(t)\,dt.$$

2) En utilisant la propriété $(\mathcal{K})$, montrer que :

$$\lim_{x\to 1} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n k(x^n) = \int_0^1 k(t)\,dt.$$

3) En posant $x = e^{-\frac{1}{N}}$ avec $N \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$\sum_{n=0}^{N} c_n \underset{N\to+\infty}{\sim} N.$$

4) Soit une série entière réelle $\sum d_n x^n$ de rayon de convergence égal à 1 telle que :

$$\forall n \geqslant 0,\ d_n \geqslant 0 \quad et \quad \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

a) Donner un exemple de série de terme général d_n remplissant les conditions précédentes .

b) On note , $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n = \sum_{p=0}^{n} d_p$ et $e_n = \sum_{k=0}^{n} d_k d_{n-k}$.

α) En utilisant les questions précédentes, montrer que :

$$\sum_{n=0}^{N} e_n \underset{N\to+\infty}{\sim} N.$$

β) Montrer que pour tout entier naturel N :

$$\sum_{n=0}^{N} e_n \leqslant T_N^2 \leqslant \sum_{n=0}^{2N} e_n.$$

γ) En déduire que $T_n = O(\sqrt{n})$ quand n tend vers plus l'infini.

δ) Montrer que s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \frac{T_n}{\sqrt{n}} = \lambda$ alors $\lambda \in \left[1, \sqrt{2}\right]$.

Exercice.

Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et u une application linéaire de $\mathcal{L}(E)$.

1) On suppose que u est un automorphisme de E tel que u^2 soit diagonalisable.

   a) Rappeler une condition nécessaire et suffisante concernant les propriétés d'un polynôme annulateur de u^2.

   b) Montrer que u est diagonalisable.

2) Soit v un automorphisme de E diagonalisable à valeurs propres strictement positives.

   a) On suppose qu'il existe un automorphisme u de E, à valeurs propres strictement positives tel que $u^2 = v$.

      α) Montrer que les sous-espaces propres de v sont stables par u.

      β) Montrer que la restriction de l'automorphisme u à tout sous-espace propre de v est diagonalisable.

      γ) Soit λ une valeur propre strictement positive de v, montrer que le sous-espace propre de v associé à la valeur propre λ, est égal au sous-espace propre de u associé à la valeur propre $\sqrt{\lambda}$.

      δ) En déduire que u est unique .

   b) Montrer l'existence d'un automorphisme u de E, à valeurs propres strictement positives, tel que $u^2 = v$.

   c) Soit u l'unique automorphisme à valeurs propres strictement positives vérifiant $u^2 = v$, montrer qu'il existe un polynôme P à coefficients complexes tel que l'on ait : $u = P(v)$.

3) On suppose u^2 diagonalisable, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable.

4) Plus généralement, soit P un polynôme à coefficients complexes tel que $P(u)$ soit diagonalisable, on suppose que toute racine complexe du polynôme dérivé P' n'est pas valeur propre de l'endomorphisme $P(u)$. Montrer que u est diagonalisable.